



Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (20 баллов) Имея полный бак топлива, катер может пройти 36 км против течения или 60 км по течению реки. На какое наибольшее расстояние по реке (в км) может уйти катер с полным баком, что бы вернуться обратно? Дрейфовать, как плот, катер не имеет права.

Ответ: 22,5

Решение. На 1 км пути против течения катер тратит $1/36$ часть своего запаса топлива, а на 1 км по течению – $1/60$. Тогда на 1 км пути против и по течению тратится $\frac{1}{36} + \frac{1}{60} = \frac{2}{45}$ запаса топлива. Следовательно, весь путь – $45/2=22,5$ км.

2. (20 баллов) У деда Мороза было 720 конфет. Он дал каждому ребёнку, пришедшему на ёлку, по 17 конфет, после чего конфет осталось меньше, чем детей, и их отдали Снегурочке. Какое наибольшее количество конфет могла получить Снегурочка?

Ответ: 23

Решение. Пусть n – количество детей, пришедших на ёлку. Дед Мороз раздал $17n$ конфет. По условию задачи $720-17n < n$, откуда $n > 40$. С другой стороны, $17n < 720$, то есть $n < 42\frac{6}{17}$. Тогда возможные значения n – 41, 42. Чтобы Снегурочка получила больше конфет, n должно принимать наименьшее возможное значение, то есть $n=41$. В этом случае Снегурочке достанется $720-17\cdot 41=23$ конфеты.

3. (20 баллов) Автомобиль движется к железнодорожному переезду со скоростью 36 км/ч. В начальный момент времени расстояние от автомобиля до переезда равно 100 м. На каком расстоянии от переезда окажется автомобиль через 11 с?

Ответ: 10 м

Решение. $36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}$. Автомобиль за указанное время проедет 110 метров. От переезда автомобиль окажется на расстоянии 10 метров.

4. (20 баллов) Минутная стрелка в 2 раза длиннее часовой. Определите, во сколько раз отличаются скорости концов минутной и часовой стрелок.

Ответ: 24

Решение. Расстояние, проходимое концом минутной стрелки, за один оборот в 2 раза больше расстояния проходимого часовой стрелкой за один оборот ($s_{мин} = 2s_{час}$). Причём, минутная стрелка один оборот проходит за 1 час, а часовая – за 12 часов. Получаем, что отношение скоростей:

$$\frac{v_{мин}}{v_{час}} = \frac{s_1}{1} : \frac{s_2}{12} = 2 \cdot 12 = 24.$$

5. (20 баллов) Победитель гонки, состоявшей из 70 кругов, обошёл последнего участника ровно на три круга. С учётом того, что средняя скорость победителя 210 км/ч, определите среднюю скорость участника, пришедшего к финишу последним.

Ответ: 201 км/ч

Решение. Средняя скорость победителя $v_1 = \frac{70s}{t_1}$, где s – длина одного круга, а t_1 – время, затраченное им на эту гонку. Средняя скорость аутсайдера $v_2 = \frac{(70-3)s}{t_2}$, где $t_1 = t_2$. В результате получаем:

$$v_2 = \frac{70-3}{70} v_1 = 201 \text{ км/ч}.$$



Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (20 баллов) Передние колёса автомобиля изнашиваются быстрее, чем задние: передние при прохождении 40000 км, а задние при прохождении 60000 км. Какой максимальный путь (в км) может пройти автомобиль с данными четырьмя колёсами?

Ответ: 48000

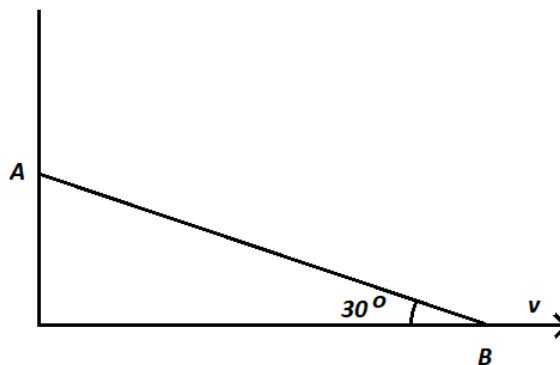
Решение. Пусть $a=40000$, $b=60000$, а искомый путь S . Ясно, что каждое колесо в качестве переднего и в качестве заднего должно проехать расстояние $S/2$ (все колёса должны изнашиваться одновременно, иначе действия водителя были неоптимальными). Поскольку суммарный износ для колеса составляет 1, получаем уравнение $\frac{S}{2a} + \frac{S}{2b} = 1$, откуда $S = \frac{2ab}{a+b}$ – среднее гармоническое величин a и b .

2. (20 баллов) Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника с углом при вершине 120° . Расстояние от M до каждой из боковых сторон равно 3, а до основания $2\sqrt{3}$. Найдите длину основания.

Ответ: 24

Решение. Пусть длина основания a . Поскольку угол при основании 30° , высота треугольника равна $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, а его площадь $S = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$. Длина боковой стороны $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Если соединить точку M с вершинами треугольника и сложить площади трёх полученных треугольников, получим другое выражение для площади $S = 2\sqrt{3}a$. Из уравнения $\frac{a^2}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}a$ находим $a=24$.

3. (20 баллов) Стержень AB движется опираясь на стенку в точке A , и на пол в точке B . В тот момент времени, когда угол между стержнем и полом составлял 30° , скорость точки B стержня была равна $v = 2$ м/с. Определите скорость точки A в этот момент времени.



Ответ: $\approx 3,46$ м/с

Решение. Скорость точки B можно разложить на две составляющие. Одна из них направлена вдоль стержня $v_{B\parallel} = v \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$. Скорости, направленные вдоль стержней у точек A и B должны быть одинаковыми, то есть $v_{A\parallel} = v_{B\parallel} = v \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$. С учётом того, что итоговая скорость точки A направлена вертикально вниз, а $v_{A\parallel}$ является её проекцией, получаем

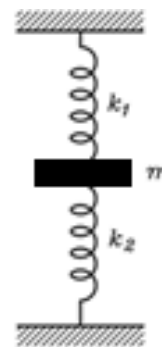
$$v_A = \frac{v_{A\parallel}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}v \approx 3,46 \text{ м/с}$$

4. (20 баллов) Имеются три тела одинаковой массы, из одного материала, но с разными температурами. Температура первого $t_1 = 10^\circ\text{C}$. Если его привести в тепловой контакт со вторым, то установится температура $t_{12} = 40^\circ\text{C}$. Если первое тело привели бы в тепловой контакт с третьим телом, то в этом случае установившаяся температура была бы равна $t_{13} = 60^\circ\text{C}$. Какая температура установится, если второе тело привести в тепловой контакт с третьим? Тела не меняют своего агрегатного состояния. Тепловых потерь нет.

Ответ: 90°C

Решение. Из уравнения теплового баланса имеем $c_1 m_1 (t_{12} - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t_{12})$, получаем, что $2t_{12} = t_1 + t_2$, $2t_{13} = t_1 + t_3$, $t_{23} = \frac{t_2 + t_3}{2} = t_{12} + t_{13} - t_1 = 90^\circ\text{C}$.

5. (20 баллов) Найдите период колебаний маятника, изображённого на рисунке. Коэффициенты упругости пружин $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 1200$ Н/м, масса груза $m = 4$ кг. Массами пружин пренебречь.



Ответ: $0,314 \text{ с}$

Решение. При отклонении маятника от положения равновесия силы упругости со стороны пружин будут «помогать» друг другу, следовательно, период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{40} = 0,314 \text{ с}.$$